M 176 **Ecole des Hautes Etudes Commerciales** 1978

1ère Composition de Mathématiques (4 h)

E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. E_1 est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée continue.

Le nombre n est un entier strictement positif.

PREMIÈRE PARTIE

A tout élément f de E_0, on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_n(0) = f(0), \text{ et } F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t)\, dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

1° Que peut-on dire de F_n si f est paire ? si f est impaire ?

2° Calculer F_n lorsque $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, lorsque $f(x) = \sum_{p=0}^{m} a_p x^p$.

3° Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M, montrer alors que F_n a la même propriété.

4° Montrer que F_n appartient à E_0.

5° a) Montrer que, si f(x) tend vers 0 quand x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini), $F_n(x)$ a la même propriété. (On pourra considérer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[0, x_0] \cup [x_0, x]$; et pour tout x assez grand et x_0 bien choisi, majorer séparément deux intégrales.)

b) Etendre au cas où f(x) tend vers λ appartenant à $\mathbb{R}$.

c) Etendre au cas où f(x) tend vers plus l'infini.

6° Montrer que F_n admet une dérivée F'_n en tout point $x \neq 0$ et que

$$F'_n(x) = \frac{n}{x}\left[f(x) - F_n(x)\right].$$

SECONDE PARTIE

Désormais f appartient à E_1.

1° Montrer que F_n admet une dérivée en tout point. Calculer $F'_n(0)$ en fonction de n et de $f'(0)$.

2° Montrer que F_n appartient à E_1 et que T_n, défini par $T_n(f) = F_n$, est un endomorphisme de E_1.

3° T_n est-il injectif ? surjectif ? (on pourra étudier la dérivabilité de F'_n.)

4° On suppose désormais que f est la fonction de répartition d'un aléa numérique (ou variable aléatoire) X dont la densité de probabilité, notée φ, appartient à E_0. Ecrivant $F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}} h(x)$ pour $x \neq 0$, étudier les variations et le signe de h(x). En déduire que F_n est la fonction de répartition d'un aléa noté X_n, de densité de probabilité Φ_n.

5° Si $A \neq 0$, montrer que pour tout entier $p \in [1, n-1]$:

$$\int_0^A t^p\, \Phi_n(t)\, dt = \frac{n}{n-p} A^p \left[F_n(A) - F_p(A)\right] = \frac{n}{n-p}\left[\int_0^A t^p\, \varphi(t)\, dt - A^{p-n}\int_0^A t^n\, \varphi(t)\, dt\right].$$

6° On suppose de plus que, pour tout entier strictement positif p, il existe

$$M_p[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p\, \varphi(t)\, dt \quad \text{(moment d'ordre p de X.)}$$

En déduire l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n, noté $M_p[X_n]$, pour tout $p < n$. Montrer que, si p reste fixe, le moment $M_p[X_n]$ a pour limite $M_p[X]$ lorsque n tend vers plus l'infini.

7° Montrer que la fonction de répartition de X_n est telle que, pour tout x fixé, sa valeur a pour limite la valeur de la fonction de répartition de X.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail